ಸೂಚಕಗಳು ಮತ್ತು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು – ೧

ಕಿರಣ ರಾವ್
ಟೆಕ್ಸಾಸ್ ಇನ್ಸ್ಟ್ರುಮೆಂಟ್ಸ್, ಬೆಂಗಳೂರು
kiran.br@gmail.com

ಏಪ್ರಿಲ್ ೨೮, ೨೦೦೫

ಪರಿವಿಡಿ

ಚಿತ್ರಗಳ ಪಟ್ಟಿ

೧ ಮುನ್ನುಡಿ

ಈ ಲೇಖನದಲ್ಲಿ ಸೂಚಕಗಳ ಮತ್ತು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಮೂಲಭೂತ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಪರಿಚಯಿಸಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಸೂಚಕವೆಂದರೇನು, ಸೂಚಕಗಳ ಪ್ರಭೇದಗಳಾವುವು; ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೆಂದರೇನು, ಅವುಗಳನ್ನು ಯಾವಯಾವ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಜೋಡಿಸಬಹುದು, ಅವುಗಳು ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಹೇಗೆ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತವೆ, ಇತ್ಯಾದಿ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ತಿಳಿಸಿಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಈ ಲೇಖನವನ್ನು ಬಿ.ಇ., ಬಿ.ಟೆಕ್., ಎಂ.ಇ., ಎಂ.ಟೆಕ್., ಹಂತದ ವಿದ್ಯಾರ್ಥಿಗಳಿಗಾಗಿ ಬರೆಯಲಾಗಿದೆ; ಆದ ಕಾರಣ ಮೂಲಭೂತ ಗಣಿತ, ವಿದ್ಯುನ್ಮಾನಗಳನ್ನು ಕಲಿತಿರುವವರು ಇದರಿಂದ ಹೆಚ್ಚು ಲಾಭ ಪಡೆಯಬಲ್ಲರು.

೨ ಸೂಚಕಗಳು

ಯಾವುದಾದರೊಂದು ಸ್ವತಂತ್ರ ಬೀಜದ ಉತ್ಪನ್ನವನ್ನು **ಸೂಚಕ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಮಾಹಿತಿಯನ್ನು ಸೂಚಿಸುವುದರಿಂದ ಇದಕ್ಕೆ ಸೂಚಕ ಎಂಬ ಹೆಸರು. ಬೀಜವು ಯಾವುದರ ಉತ್ಪನ್ನವೂ ಆಗಿರದೆ ಸ್ವತಂತ್ರವಾಗಿರುತ್ತದೆ (ಇದಕ್ಕೆ **ಉದಾಹರಣೆ** ಕಾಲ t ; ಕಾಲವು ಮತ್ತೊಂದರ ಉತ್ಪನ್ನವಲ್ಲ, ಅದು ಸ್ವತಂತ್ರ).

ಸೂಚಕಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

- ವಿದ್ಯುನ್ಮಾನಿಕ ಸೂಚಕಗಳು - ಒಂದು ಮಂಡಲದಲ್ಲಿ ವಿಭವ $V(t)$ ಹಾಗೂ ಧಾರೆ $I(t)$. ಇವುಗಳಲ್ಲಿ ಬೀಜ t ಎಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ.
- ಶ್ರಾವ್ಯ ಸೂಚಕಗಳು - ಮಾತಿನ ಸೂಚಕಗಳು
- ಜೈವಿಕ ಸೂಚಕಗಳು - ಡಿ.ಎನ್.ಎ. ಸರಣಿ

೩ ಸೂಚಕಗಳಲ್ಲಿ ಪ್ರಭೇದಗಳು

ಕಾಲವು ಸಾಂತರವಾಗಿದೆಯೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ೨ ವಿಧವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು:

೧. ನಿರಂತರ ಸೂಚಕ

೨. ಸಾಂತರ ಸೂಚಕ

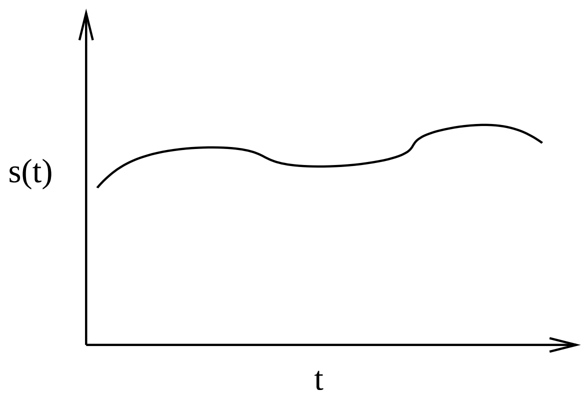
ಸೂಚಕವು ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಧಿಯಿಂದ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತಿಸುವುದೋ ಇಲ್ಲವೋ ಎಂಬುದರ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ೨ ವಿಧವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬ್ಹುದು:

೧. ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕ

೨. ಅಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕ

ಸೂಚಕಗಳು ಪಡೆಯುವ ಬೆಲೆಯ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅವುಗಳನ್ನು ಎರಡು ವಿಧವಾಗಿ ವಿಂಗಡಿಸಬಹುದು:

೧. ಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕ



ಚಿತ್ರ ೧: ನಿರಂತರ ಸೂಚಕ

೨. ಅಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕ

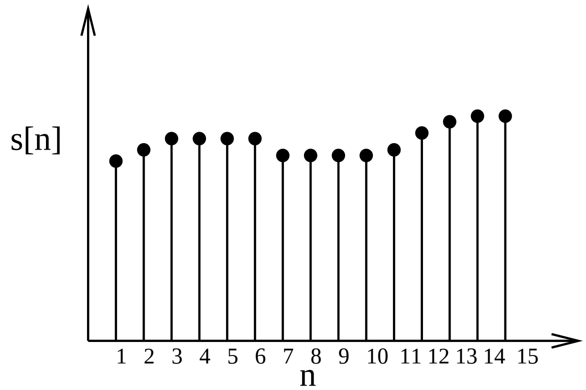
ಗಮನಿಸಬೇಕಾದ ವಿಷಯವೇನೆಂದರೆ ಒಂದು ಸೂಚಕವು ಒಮ್ಮೆಗೇ ನಿರಂತರವೂ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತಿಯೂ ಸಾಂಖ್ಯವೂ ಆಗಿರಬಹುದು. ಅಂತಹ ಸೂಚಕವನ್ನು ನಿರಂತರ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತೇವೆ. ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ $2 \times 2 \times 2$ ರೀತಿಯ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಸೂಚಕವಿಶೇಷಣಗಳನ್ನು ಕೆಳಗೆ ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ವಿವರಿಸಿದೆ.

೩.೧ ನಿರಂತರ ಸೂಚಕ

ಕಾಲದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದುಕೊಂಡು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುವುದರಿಂದ ಈ ಸೂಚಕ $s(t)$ **ನಿರಂತರ**. "ಕಾಲದ ಎಲ್ಲಾ ಬೆಲೆಗಳಿಗೂ" ಎಂದರೆ ಯಾವುದೇ ಎರಡು ಕ್ಷಣಗಳನ್ನು ತೆಗೆದುಕೊಂಡರೂ ಅವುಗಳ ಮಧ್ಯೆ ಅಸಂಖ್ಯಾತ(∞) ಕ್ಷಣಗಳಿರುತ್ತವೆಯಲ್ಲ, ಆ ಎಲ್ಲಾ ಕ್ಷಣಗಳಲ್ಲೂ ಈ ಸೂಚಕವು ಒಂದಲ್ಲ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆದಿದ್ದು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ. "ನಿರಂತರ" ಎಂದರೆ "ತಡೆಯಿಲ್ಲದೆ" ಎಂದು ಅರ್ಥೈಸಿಕೊಳ್ಳಬೇಕು. ನಿರಂತರ ಸೂಚಕಕೆ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ ೧ ನಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಎಲ್ಲಾ ಸೂಚಕಗಳೂ ಹೀಗೆಯೇ ಅಲ್ಲವೆ? ಎಂದು ಸಂದೇಹ ಬರಬಹುದು. ಅಲ್ಲ, ಎಲ್ಲಾ ಸೂಚಕಗಳೂ ಹೀಗಲ್ಲ. ಆದರೆ ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಸಿಗುವ ಸೂಚಕಗಳೆಲ್ಲ ಹೀಗೆಯೇ. ಅಷ್ಟೆ ಏಕೆ, "ಸಾಂತರ" ಕಾಲವೆನ್ನುವುದು ಮನುಷ್ಯನು ವ್ಯವಹಾರಕ್ಕಾಗಿ ಮಾಡಿಕೊಂಡಿರುವ ಕಲ್ಪನೆಯಷ್ಟೆ. ನಿರಂತರ ಸೂಚಕವು $t = 4$ ಆದಾಗಲೂ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, $t = 5$ ಆದಾಗಲೂ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, $t = 4.234342344554355$ ಆದಾಗಲೂ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ.

೩.೨ ಸಾಂತರ ಸೂಚಕ

ಕಾಲವನ್ನು ವ್ಯಾವಹಾರಿಕವಾಗಿ ಸಾಂತರವೆಂದು ಕಲ್ಪಿಸಿಕೊಳ್ಳುವುದು ರೂಢಿ. ಉದಾಹರಣೆಗೆ ವ್ಯವಹಾರದಲ್ಲಿ ಕಾಲವೆನ್ನುವುದು ಸೆಕೆಂಡಿಗೆ ಒಮ್ಮೆ ಮಾತ್ರ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ ಎಂಬಂತೆ ಮಾತಾಡುತ್ತೇವೆ. ಎರಡು ಸೆಕೆಂಡುಗಳ ಮಧ್ಯೆಯೂ ಕಾಲವೆನ್ನುವುದು ಇದ್ದೇ ಇರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಸಾಮಾನ್ಯವಾಗಿ "ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನಲ್ಲಿ ಅಂತಹ ಮಹಾಕಾರ್ಯವೇನೂ ಆಗುವುದಿಲ್ಲ" ಎಂದು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕಾಲಾವಧಿಯ ಅಸ್ತಿತ್ವವನ್ನೇ ಪರಿಗಣಿಸುವುದಿಲ್ಲ. ಆದ್ದರಿಂದ ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿಗಿಂತ ಕಡಿಮೆ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಯಾವ ಸೂಚಕವೂ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ ಎಂದು ಆ ಸೂಚಕವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲೇ



ಚಿತ್ರ ೨: ಸಾಂತರ ಸೂಚಕ

ಇರುವುದಿಲ್ಲ ಎಂಬಂತೆ ಮಾತಾಡುತ್ತೇವೆ. ಹೀಗೆ ಮಾಡುವುದು ಸರಿಯಲ್ಲದಿದ್ದರೂ ವ್ಯವಹಾರದ ದೃಷ್ಟಿಯಿಂದ ಅತ್ಯಂತ ಅವಶ್ಯಕವೂ ಹೌದು.

ಉದಾಹರಣೆಗೆ ಒಬ್ಬ "ರೋಗಿಯ ಮೈ-ಉಷ್ಣತೆ ಇವತ್ತು ಹೇಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ದಾಖಲಿಸಿ" ಎಂದು ನಿಮಗೆ ಯಾರಾದರೂ ಹೇಳಿದರೆ ನೀವು ಮೊದಲು ಕೇಳಬೇಕಾದ ಪ್ರಶ್ನೆ: "ಘಂಟೆಗೊಮ್ಮೆ ನೋಡಿದರೆ ಸಾಕಾ?". ವೈದ್ಯರು 'ಸಾಕು' ಎಂದರು ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ ನೀವು 24 ಬಾರಿ ದಾಖಲೆ ಮಾಡಬಹುದು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ ಒಂದು ದಿನದಲ್ಲಿ ನೀವು ∞ ಬಾರಿ ದಾಖಲಿಸಬೇಕಾದೀತು! (ಇದು ಎಲ್ಲಾದರೂ ಸಾಧ್ಯವೇ?!). ಒಟ್ಟಿನಲ್ಲಿ ಘಂಟೆಗೊಮ್ಮೆ ನೀವು ದಾಖಲಿಸಿದ ಉಷ್ಣಾಂಶವನ್ನು $s[n]$ ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ಅದರಲ್ಲಿ n ಎನ್ನುವುದು "ಎಷ್ಟನೇ ದಾಖಲೆ?" ಎನ್ನುವ ಪ್ರಶ್ನೆಗೆ ಉತ್ತರ. ಈ $s[n]$ ಎನ್ನುವುದು ಸಾಂತರ ಸೂಚಕ. $n = 4$ ಆದಾಗ ಈ ಸೂಚಕವು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, $n = 5$ ಆದಾಗ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ $n = 4.234342344554355$ ಆದಾಗ ಈ ಸೂಚಕಕ್ಕೆ ಯಾವ ಬೆಲೆಯೂ ಇರುವುದಿಲ್ಲ, ಅದು ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲೇ ಇರುವುದಿಲ್ಲ. ಸಾಂತರ ಸೂಚಕಗಳ ಬಗ್ಗೆ ಮಾತಾಡುವಾಗ ಮೇಲಿನ n ನ ಬೆಲೆ ಒಂದು ಪೂರ್ಣಸಂಖ್ಯೆ $(... - 5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5...)$ ಆಗಿರಲು ಮಾತ್ರ ಸಾಧ್ಯ. ಸಾಂತರ ಸೂಚಕದ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ ೨ ನಲ್ಲಿ ಕಾಣಬಹುದು.

೩.೩ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕ

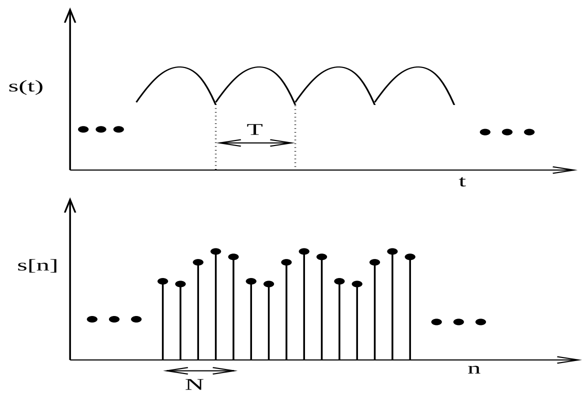
ಒಂದು ನಿರ್ದಿಷ್ಟ ಅವಧಿಯೊಡನೆ ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಅದೇ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತನಗೊಳ್ಳುವ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು **ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ** ಸೂಚಕಗಳೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇವುಗಳ ಬೀಜವು ಸಾಂತರವಾಗಾದರೂ ಇರಬಹುದು ಅಥವ ನಿರಂತರವಾಗಾದರೂ ಇರಬಹುದು. ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಚಿತ್ರ ೩ ನಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇದರಲ್ಲಿ $s(t)$ ಹಾಗೂ $s[n]$ ಗಳ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತನಾವಧಿಗಳು ಕ್ರಮವಾಗಿ T ಮತ್ತು N ಆಗಿವೆ.

ಒಂದು ಅವಧಿ T ಅಥವಾ N ನಲ್ಲಿ ಈ ಸೂಚಕವನ್ನು ತಿಳಿದರೆ ಪ್ರತಿಯೊಂದು ಕ್ಷಣ t ಅಥವಾ ದಾಖಲೆ-ಸಂಖ್ಯೆ n ನಲ್ಲೂ ಇದನ್ನು ತಿಳಿದಂತೆ, ಏಕೆಂದರೆ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತನದ ಅರ್ಥದಿಂದಲೇ

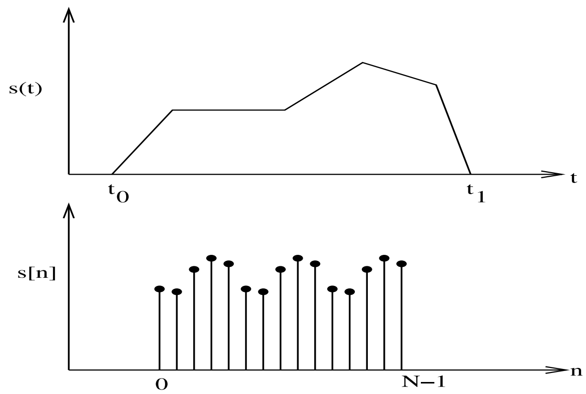
$$s(t + T) = s(t) \qquad (೧)$$

ಹಾಗೂ

$$s[n + N] = s[n]. \qquad (೨)$$



ಚಿತ್ರ ೩: ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕಗಳು: ಮೇಲೆ - ನಿರಂತರ, ಕೆಳಗೆ - ಸಾಂತರ



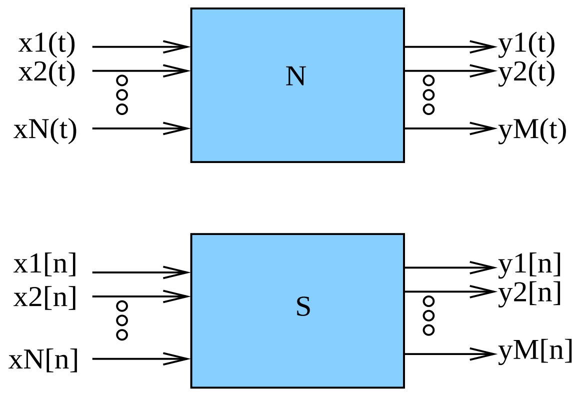
ಚಿತ್ರ ೪: ಅಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕ: ಮೇಲೆ - ನಿರಂತರ, ಕೆಳಗೆ - ಸಾಂತರ

ಈ ಸತ್ಯವನ್ನು ಚಿತ್ರ ೩ ನಲ್ಲಿ ಸುಲಭವಾಗಿ ಕಾಣಬಹುದು.

ಜೊತೆಗೆ, ಅನ್ಯಥಾ ತಿಳಿಸದಿದ್ದಾಗ ನಿರಂತರ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕಗಳು ಬೀಜ $b = -\infty$ ನಿಂದ $b = +\infty$ ವರೆಗೂ ಅಸ್ತಿತ್ವದಲ್ಲಿರುತ್ತವೆ ($b = t$ ಅಥವಾ n).

೩.೪ ಅಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕ

ಯಾವ ಸೂಚಕವು ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತಿಸುವುದಿಲ್ಲವೋ ಅದೇ ಅಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕ. ಹೀಗಿದ್ದರೂ ಈ ಸೂಚಕವನ್ನು ∞ ಅವಧಿಯ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕವೆಂದು ಪರಿಗಣಿಸಬಹುದು. ನಿರಂತರ ಮತ್ತು ಸಾಂತರ ಅಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕಗಳ ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಚಿತ್ರ ೪ ನಲ್ಲಿ ನೋಡಬಹುದು. ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ನಿರಂತರ ಸೂಚಕವು $t = t_0$ ನಿಂದ $t = t_1$ ವರೆಗೆ ಮಾತ್ರ ಧನವಾಗಿದ್ದು ಮಿಕ್ಕ ಕಾಲದಲ್ಲೆಲ್ಲ ಶೂನ್ಯವಾಗಿದೆ; ಹಾಗೆಯೇ ಸಾಂತರ ಸೂಚಕವು ಕೇವಲ $0 \leq n \leq N-1$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಧನವಾಗಿದ್ದು ಮಿಕ್ಕಲ್ಲೆಲ್ಲ ಶೂನ್ಯವಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ ೫: ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು: ಮೇಲೆ - ನಿರಂತರ, ಕೆಳಗೆ - ಸಾಂತರ

೩.೫ ಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕ

ಯಾವ ಸೂಚಕವು ನಿಗದಿತ M ಬೆಲೆಗಳಲ್ಲಿ ಒಂದನ್ನು ಮಾತ್ರ ಪಡೆಯುವುದೋ ಅದನ್ನು ಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕವೆಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಇದರ ಬೆಲೆಯನ್ನು $log_2 M$ ಬಿಟ್ಟುಗಳಿಂದ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದು. ಸಾಧಾರಣವಾಗಿ ಈ ಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕಗಳು ಅಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕಗಳಿಂದಲೇ ಹುಟ್ಟಿರುತ್ತವೆ. $< \infty$ ಸಂಖ್ಯೆಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬೆಲೆಯನ್ನು ವ್ಯಕಪಡಿಸಅಲು ಸಾಧ್ಯವಾದ್ದರಿಂದ ಈ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕಗಳೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಗಣಕಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಸೂಚಕವನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅಥವಾ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬೇಕಾದರೆ ಅದು ಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕವೇ ಆಗಿರಬೇಕು ಎನ್ನುವುದನ್ನು ನೀವು ಗಮನಿಸಬೇಕು.

೩.೬ ಅಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕ

ಯಾವ ಸೂಚಕದ ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳನ್ನು ಪಡೆಯಬಲ್ಲದೋ ಅದನ್ನು ಅಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕವೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಇದನ್ನು ಗಣಕಯಂತ್ರದಲ್ಲಿ ಯಾವ ನಷ್ಟವೂ ಇಲ್ಲದಂತೆ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸ್ಲು ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬಿಟ್ಟುಗಳು ಬೇಕಾಗುತ್ತವೆ. ಪ್ರಕೃತಿಯಲ್ಲಿ ಈ ರೀತಿಯ ಸೂಚಕಗಳೇ ಹೇರಳವಾಗಿ ಲಭ್ಯವಿರುವುದು. 1 ವೋಲ್ಟಿಗೂ 2 ವೋಲ್ಟಿಗೂ ಮಧ್ಯದಲ್ಲಿ ಎಷ್ಟು ಬೆಲೆಗಳಿವೆ? ಅಸಂಖ್ಯಾತ ಬೆಲೆಗಳಿವೆ. "ಅಸಾಂಖ್ಯ ಸೂಚಕಗಳು" ಎಂದರೆ ಸೂಚಕವು ∞ ಎಂಬ ಬೆಲೆಯನ್ನು ಪಡೆಯುತ್ತದೆ ಎಂದಲ್ಲ, ಅದು ಪಡೆಯಬಹುದಾದ ಬೆಲೆಗಳ **ಸಂಖ್ಯೆ** ∞ .

೪ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು

ಯೋಜ್ಯ ಗಳನ್ನು ಒಳಗೆ ತೆಗೆದುಕೊಂಡು *ಲಬ್ಧ* ಗಳನ್ನು ಹೊರಗೆ ಕೊಡುವುದೇ ವ್ಯವಸ್ಥೆ. ಯೋಜ್ಯಗಳಿಗೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ನೀಡುವ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅದರ ಲಬ್ಧಗಳು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತವೆ. ಯೋಜ್ಯಗಳನ್ನು ಸೂಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುವುದೇ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಕೆಲಸ. ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಸ್ವೀಕರಿಸುವ ಯೋಜ್ಯದ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಅದನ್ನು *ನಿರಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆ* ಅಥವಾ *ಸಾಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆ* ಎಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು. *ನಿರಂತರ ಯೋಜ್ಯಗಳನ್ನು* ($x_i(t)$) *ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿ ನಿರಂತರ ಲಬ್ಧಗಳನ್ನು* ($y_i(t)$) *ಕೊಡುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ನಿರಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆ; ಸಾಂತರ ಯೋಜ್ಯಗಳನ್ನು* ($x_i[n]$ *ಪರಿಷ್ಕರಿಸಿ ಸಾಂತರ*

ಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ($y_i[n]$) ಕೊಡುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಸಾಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆ. ಚಿತ್ರ ೫ ನಲ್ಲಿ N ಎಂಬ ನಿರಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನೂ S ಎಂಬ ಸಾಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನೂ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಇಲ್ಲಿ x_i ಗಳು ಯೋಜ್ಯಗಳು ಹಾಗೂ y_i ಗಳು ಲಬ್ಧಗಳೆಂದು ಗುರುತಿಸಿ. ಎರಡು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲೂ N ಯೋಜ್ಯಗಳಿವೆ, M ಲಬ್ಧಗಳಿವೆ.

ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

- ವಿಮಾನ ಅಥವಾ ಬಾಹ್ಯಾಕಾಶ ವಾಹನದ ಚಲನ
- ಆರ್ಥಿಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸಿ ಶೇರುಗಳ ಮೊತ್ತವನ್ನು ಅಂದಾಜುಮಾಡಬಲ್ಲ ಒಂದು ಗಣಕ-ಕ್ರಮ
- ಒಂದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ತುದಿಗಳನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಬಲ್ಲ ಗಣಕ-ಕ್ರಮ

೪.೧ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಜೋಡಣೆ

ಎರಡು ಅಥವಾ ಹೆಚ್ಚು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ಜೋಡಿಸಿ ದೊಡ್ಡದೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ರಚಿಸಬಹುದು. ಇದಕ್ಕೆ ಸ್ಫೂರ್ತಿಯೇನು? ಇನ್ನೂ ಹೆಚ್ಚು ಕಾರ್ಯದಕ್ಷತೆಯುಳ್ಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ರಚಿಸುವುದು, ಅಥವಾ ಒಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಸೂಕ್ತ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಮತ್ತೊಂದು ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬದಲಾಯಿಸುವುದು. ಇಲ್ಲಿ ಎರಡು ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಮೂರು ರೀತಿಯ ಜೋಡಣೆಗಳನ್ನು ತಿಳಿಯೋಣ:

೧. ಸರಪಳಿ ಜೋಡಣೆ (ಚಿತ್ರ ೬ a)

ಇದರಲ್ಲಿ ಮೊದಲನೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆ A ನ ಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಎರಡನೆ B ನ ಯೋಜ್ಯಗಳಾಗಿ ಜೋಡಿಸಲಾಗುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ರಚಿಸಿದ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯೋಜ್ಯಗಳು A ನ ಯೋಜ್ಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ, ಲಬ್ಧಗಳು B ನ ಲಬ್ಧಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

೨. ಸಮಾಂತರ ಜೋಡಣೆ(ಚಿತ್ರ ೬ b)

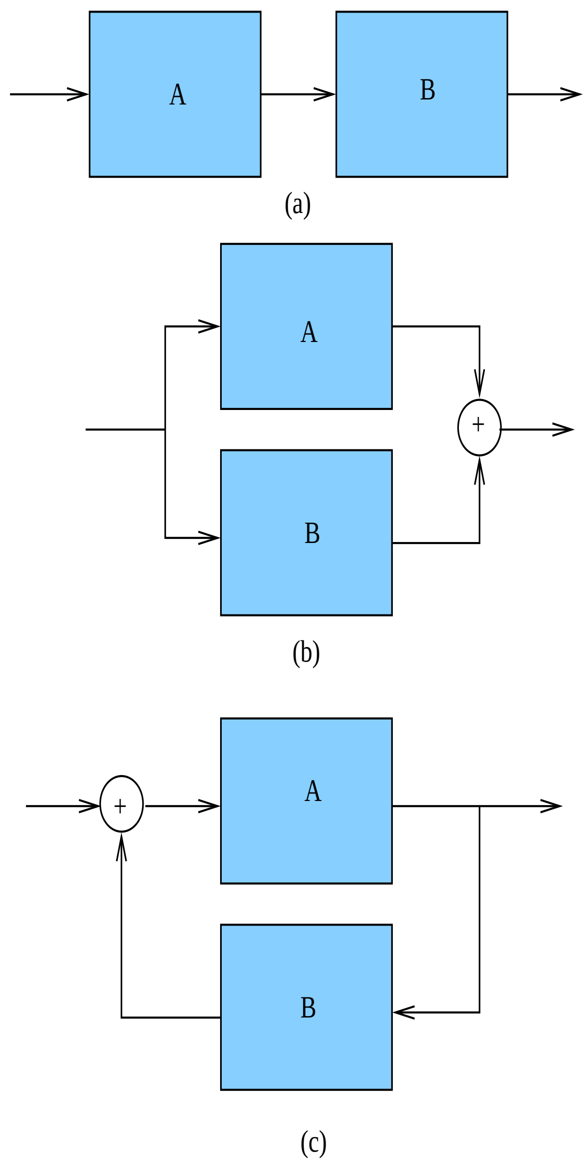
ಇದರಲ್ಲಿ A ಮತ್ತು B ಗಳ ಯೋಜ್ಯಗಳು ಒಂದೇ ಆಗಿದ್ದು ಅವುಗಳೇ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯೋಜ್ಯಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ. ಜೊತೆಗೆ ಅವುಗಳ ಲಬ್ಧಗಳನ್ನು ಸಂಕಲಿಸಿದಾಗ ದೊರಕುವ ಸೂಚಕಗಳೇ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಲಬ್ಧಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ.

೩. ಲಬ್ಧಾಶನ ಜೋಡಣೆ (ಚಿತ್ರ ೬ c)

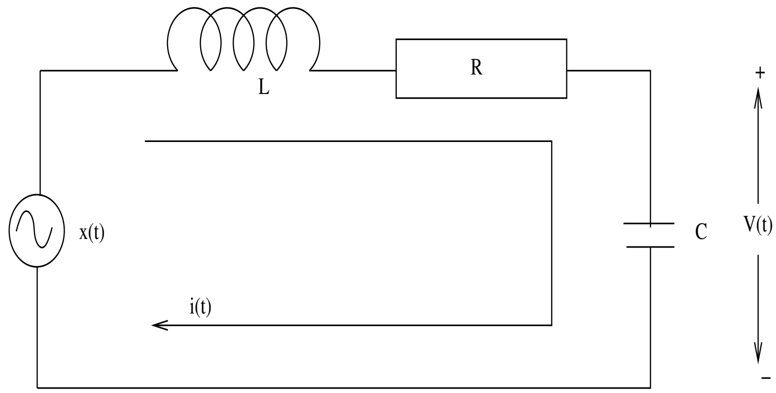
ಈ ಜೋಡಣೆಯಿಂದ ರಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು C ಎನ್ನೋಣ.

ವ್ಯವಸ್ಥೆ A ನ ಲಬ್ಧವನ್ನು ($= C$ ನ ಲಬ್ಧವನ್ನು) ವ್ಯವಸ್ಥೆ B ನ ಯೋಜ್ಯವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟು, B ನ ಲಬ್ಧವನ್ನು C ನ ಯೋಜ್ಯದೊಡನೆ ಕೂಡಿ A ಗೆ ಯೋಜ್ಯವಾಗಿ ಕೊಡಲಾಗುತ್ತದೆ. ತನ್ನ ಲಬ್ಧವನ್ನೇ "ತಿನ್ನು" ವುದರಿಂದ ಈ ಜೋಡಣೆಗೆ ಲಬ್ಧಾಶನ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಎಂದು ಹೆಸರು.

ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಲ್ಲಿ ಇದನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲು ವ್ಯವಸ್ಥೆ A ನ ಯೋಜ್ಯ, ಲಬ್ಧಗಳನ್ನು x_A ಮತ್ತು y_A ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ, B ನ ಯೋಜ್ಯ, ಲಬ್ಧಗಳನ್ನು x_B ಮತ್ತು y_B ಎಂದು ಕರೆಯೋಣ. ರಚಿಸಲ್ಪಡುವ ಹೊಸ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಯೋಜ್ಯ, ಲಬ್ಧಗಳನ್ನು x ಮತ್ತು y ಎಂದು ಕರ್ಯೋಣ. ಆಗ $x_A = x + y_B$ ಹಾಗೂ $x_B = y_A = y$.



ಚಿತ್ರ ೬: ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಜೋಡಣೆ: (a) - ಸರಪಳಿ, (b) - ಸಮಾಂತರ, (c) - ಲಬ್ಧಾಶನ



ಚಿತ್ರ ೭: ರೋ-ಧಾ-ಪ್ರೇ ಮಂಡಲ

೪.೨ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ಉದಾಹರಣೆಗಳು

ನಿರಂತರ ಮತ್ತು ಸಾಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ತಲಾ ಒಂದು ಉದಾಹರಣೆಯನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಕೊಡಲಾಗಿದೆ. ಉದಾಹರಣೆಗಳಿಗೆ ಬರವಿಲ್ಲ, ಆದರೆ ಬರೆಯುವುದಕ್ಕೆ ಪುರ್ಸೊತ್ತಿಲ್ಲ, ಅಷ್ಟೆ!

೪.೨.೧ ರೋ.ಧಾ.ಪ್ರೇ. ಮಂಡಲ

ಚಿತ್ರ ೭ ನಲ್ಲಿ ರೋಧಕ R , ಧಾರಕ C ಹಾಗೂ ಪ್ರೇರಕ L ಗಳ ಸರಪಳಿಯನ್ನು (ರೋ.ಧಾ.ಪ್ರಾ ಸರಪಳಿಯನ್ನು) ವಿಭವಪ್ರೇಷಕ $x(t)$ ($=$ ಯೋಜ್ಯ) ನಿಂದ ಉತ್ತೇಜಿಸಿದಾಗ ಧಾರೆ $i(t)$ ಹಾಗೂ ಧಾರಕವಿಭವ $V(t)$ ($=$ ಲಬ್ಧ) ಗಳ ಸಂಬಂಧವನ್ನು ತಿಳಿಸುವ ಈ 2 ನೇ ಘಾತದ ವ್ಯವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ ಅನ್ವಯಿಸುತ್ತದೆ:

$$Ri(t) + L\frac{dI(t)}{dt} + V(t) = x(t) \tag{೩}$$

[**ಗಮನಿಸಿ:** ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಓದಿಕೊಳ್ಳಿ: "ಆರ್ ಐ-ಬೀಜ-ಟೀ ಕೂಡು ಎಲ್ ಡೀ-ವ್ಯ-ಬೀಜ-ಟೀ-ಭಾಗಿಸು-ಡೀ-ಟೀ ಕೂಡು ವೀ-ಬೀಜ-ಟೀ ಅಂದರೆ ಎಕ್ಸ್-ಬೀಜ-ಟೀ".]

ಇಲ್ಲಿ

$$i(t) = C\frac{dV(t)}{dt} \tag{೪}$$

ಆಗಿರುವುದರಿಂದ

$$LC\frac{d^2V(t)}{dt^2} + RC\frac{dV(t)}{dt} + V(t) = x(t) \tag{೫}$$

[**ಗಮನಿಸಿ:** ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವನ್ನು ಹೀಗೆ ಓದಿಕೊಳ್ಳಿ: "ಎಲ್ ಸೀ ಡೀ-ವರ್ಗ ವೀ-ಬೀಜ-ಟೀ ಭಾಗಿಸು ಡೀ ಟೀ-ವರ್ಗ ಕೂಡು ಆರ್ ಸೀ ಡೀ ವೀ-ಬೀಜ-ಟೀ ಭಾಗಿಸು ಡೀ-ಟೀ ಕೂಡು ವೀ-ಬೀಜ-ಟೀ ಅಂದರೆ ಎಕ್ಸ್-ಬೀಜ-ಟೀ".]

ಇಲ್ಲಿ ಯೋಜ್ಯ $x(t)$ ಹಾಗೂ ಲಬ್ಧ $V(t)$ ಗಳಷ್ಟೇ ಅಲ್ಲದೆ ಧಾರೆ $i(t)$ ಕೂಡ ನಿರಂತರವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ನಿರಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ.

೪.೨.೨ ಮೂಲಭೂತ ತುದಿ-ಅನ್ವೇಷಕ

ಒಂದು ಸಾಂತರ ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ವಸ್ತುವಿನ/ಆಕಾರದ ತುದಿಗಳನ್ನು ಎತ್ತಿ-ತೋರಿಸುವುದಕ್ಕೆ ಮಾಡಬೇಕಾಗಿರುವುದೇನು? ತುದಿಗಳು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಸ್ವಾಭಾವಿಕವಾಗಿಯೇ ತಮ್ಮ ಸುತ್ತ-ಮುತ್ತಲ ಚುಕ್ಕಿಗಳಿಗಿಂತ ಬೇರೆಯ ಬಣ್ಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ ಎಂದು ಗಮನಿಸಿ. ಎಲ್ಲೆಲ್ಲಿ ಚುಕ್ಕೆಗಳಲ್ಲಿ ಬದಲಾವಣೆಯಿದೆಯೋ ಅದನ್ನೆಲ್ಲ ಎತ್ತಿ ತೋರಿಸಲು ಈ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸಬಹುದು:

$$y[n] = x[n+1] - 2x[n] - x[n-1] = (x[n+1] - x[n]) - (x[n] - x[n-1]) \quad (೬)$$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವು ವ್ಯವಕಲನ ಸಮೀಕರಣವೆಂದು ಕರೆಯೋಣ ("ವ್ಯವಕಲಿತ ಸಮೀಕರಣ" ಅಲ್ಲ, ಅದು ನಿರಂತರ ಸೂಚಕಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು; ಇದು ಸಾಂತರ ಸೂಚಕಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಅನ್ವಯಿಸುವುದು). ಇಲ್ಲಿ n ಎನ್ನುವುದು ಚಿತ್ರದಲ್ಲಿ ಚುಕ್ಕೆಯ ಸಂಖ್ಯೆ. (ನಿಜವಾಗಿ ನೋಡಿದರೆ ಒಂದು ಚಿತ್ರವನ್ನು x ಮತ್ತು y - ಎರಡು ಆಧಾರ-ರೇಖೆಗಳಿದ್ದರೆ ಮಾತ್ರ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದಕ್ಕಾಗುವುದು; ಆದರೆ ಇಲ್ಲಿ ಅಷ್ಟೆಲ್ಲ ಬೇಡ.)

೪.೩ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಗುಣಗಳು

ನಾವು ಅಧ್ಯಯಿಸುವ ಬಹುತೇಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಮೂರು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳನ್ನು ಹೊಂದಿರುತ್ತವೆ. ಅವುಗಳಾವುವೆಂದರೆ:

- ಅನಪೇಕ್ಷಕತ್ವ
- ಅವಿಕಾರತ್ವ
- ರೇಖಾನುಗತತ್ವ

ಈ ಗುಣಗಳಿಗೆ ವಿಲಕ್ಷಣವಾದ ಗುಣಗಳನ್ನುಳ್ಳ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಇಲ್ಲವೇ ಇಲ್ಲವೆಂದಲ್ಲ, ಆದರೆ ಅವುಗಳನ್ನು ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು, ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳುವುದು ಕಷ್ಟವಾದ್ದರಿಂದ ಅವುಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪರಿಗಣಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಇನ್ನು ಈ ಮೇಲಿನ ಗುಣಗಳನ್ನು ಒಂದೊಂದಾಗಿ ಅರ್ಥಮಾಡಿಕೊಳ್ಳೋಣ.

೪.೩.೧ ಅನಪೇಕ್ಷಕತ್ವ

ಯಾವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಭವಿಷ್ಯದ ಯೋಜ್ಯಗಳನ್ನು ಅಪೇಕ್ಷಿಸದೆ ಹಿಂದಿನ ಮತ್ತು ಈಗಿನ ಯೋಜ್ಯಗಳ ಆಧಾರದ ಮೇಲೆ ಮಾತ್ರ ಈಗಿನ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೊಡುವುದೋ ಆ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಅನಪೇಕ್ಷಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೆನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಭವಿಷ್ಯದ ಯೋಜ್ಯಗಳ ಅಪೇಕ್ಷೆಯಿಲ್ಲದೆ ವರ್ತಿಸುವುದೇ ಅನಪೇಕ್ಷಕತ್ವ. ಗಮನಿಸಿ:

- ಎಲ್ಲಾ ನಿಜ-ಕಾಲ ಭೌತಿಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೂ ಅನಪೇಕ್ಷಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೇ, ಏಕೆಂದರೆ ಕಾಲವು ಮುಂದಕ್ಕೆ ಮಾತ್ರ ಹರಿಯುತ್ತದೆ. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಕಾರಣವು ಸಂಭವಿಸಿದ ಮೇಲೆ ಮಾತ್ರ ಕಾರ್ಯವು ಸಂಭವಿಸುವುದು.
- ದೇಶವನ್ನು (ಕಾಲವನ್ನಲ್ಲ) ಬೀಜವಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸೂಚಕಗಳಿಗೆ ಅನಪೇಕ್ಷಕತ್ವವು ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ, ಏಕೆಂದರೆ ದೇಶದಲ್ಲಿ ಎಡ, ಬಲ, ಮೇಲೆ, ಕೆಳಗೆ - ಇಲ್ಲೆಲ್ಲ ಚಲಿಸಬಹುದು. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಸಮಾನ್ಯವಾಗಿ "ಭವಿಷ್ಯದಲ್ಲಿ ಬರುವ ಯೋಜ್ಯ" ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಅರ್ಥವಿರುವುದಿಲ್ಲ.

- ಅನಪೇಕ್ಷಕತ್ವವು ಸ್ಮರಿತ (ನಿಜಕಾಲಕ್ಕೆ ವಿರುದ್ಧ) ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಪರಿಷ್ಕರಿಸುವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಿಗೆ ಅನ್ವಯಿಸುವುದಿಲ್ಲ

ಇನ್ನು ಕೆಲವು ಉದಾಹರಣೆಗಳನ್ನು ನೋಡೋಣ:

೧. $y(t) = x^2(t-1)$

ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲಿ ಉದಾಹರಣೆಗೆ $y(5)$ ಕೇವಲ $x(4)$ ಮೇಲೆ ಮಾತ್ರ ಆಧರಿತವಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದು ಅನಪೇಕ್ಷಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೇ.

೨. $y(t) = x(t+1)$

ಇಲ್ಲಿ ಯಾವುದೇ ಕ್ಷಣ t ನಲ್ಲಿ ಲಬ್ಧವು ಒಂದು ಸೆಕೆಂಡಿನ ನಂತರದ ಯೋಜ್ಯದ ಮೇಲೆ ಆಧರಿತವಾಗಿರುವು-ದರಿಂದ ಇದು ಅನಪೇಕ್ಷಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯಲ್ಲ, ಅಪೇಕ್ಷಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆ.

೩. $y[n] = x[-n]$

ಇಲ್ಲಿ $y[5] = x[-5]$ ... ಇದು ಪರವಾಗಿಲ್ಲ, ಆದರೆ $n < 0$ ಆದಾಗ ಅನಪೇಕ್ಷಕತ್ವ ನಿಲ್ಲುವುದಿಲ್ಲ: $y[-5] = x[5]$! ಆದ್ದರಿಂದ ಇದು ಅಪೇಕ್ಷಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೇ.

೪. $y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} x^3[n-1]$

ಇದೂ ಅನಪೇಕ್ಷಕವೇ ಎಂದು ಕಂಡುಕೊಳ್ಳಿ.

೪.೩.೨ ಅವಿಕಾರತ್ವ

ಸರಳವಾಗಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ ಯಾವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಕಾಲಕಾಲಕ್ಕೆ ಬದಲಾಗುವುದಿಲ್ಲವೋ (ವಿಕಾರವನ್ನು ಹೊಂದುವುದಿ-ಲ್ಲವೋ) ಅದನ್ನು ಅವಿಕಾರಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಗಣಿತದ ಭಾಷೆಯಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ:

- ಒಂದು ಸಾಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆ $x[n] \to y[n]$ ಅವಿಕಾರಿಯಾದರೆ $x[n-n_0] = y[n-n_0]$. ಅರ್ಥಾತ್ - ಯೋಜ್ಯವನ್ನು n_0 ನಷ್ಟು ತಡವಾಗಿಸಿದರೆ ಲಬ್ಧವೂ ಅಷ್ಟೇ ತಡವಾಗಿ ಬರುತ್ತದೆ, ಅಷ್ಟೆ.
- ಹಾಗೆಯೇ ಒಂದು ನಿರಂತರ ವ್ಯವಸ್ಥೆ $x(t) \to y(t)$ ಅವಿಕಾರಿಯಾದರೆ $x(t-t_0) = y(t-t_0)$.

ಇನ್ನು ಉದಾಹರಣೆಗಳು:

೧. $y(t) = x^2(t-1)$

ಇದು ಅವಿಕಾರಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆ.

೨. $y[n] = (\frac{1}{2})^{n+1} x^3[n-1]$

ಇದು ವಿಕಾರಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆ, ಏಕೆಂದರೆ $n = 0$ ಆದಾಗ $x[0] = 1$ ಅನ್ನು ಯೋಜಿಸಿದರೆ $n = 1$ ಆದಾಗ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಲಬ್ಧವು $y[1] = \frac{1}{4}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಅದೇ ಯೋಜ್ಯವನ್ನು $n = 10$ ಆದಾಗ ಯೋಜಿಸಿದರೆ $n = 11$ ಆದಾಗ ಲಬ್ಧವು $y[11] = \frac{1}{2^{12}}$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗೆ ಯಾವಾಗ ಯೋಜಿಸುತ್ತೇವೆ ಎನ್ನುವುದೂ ಯೋಜನೆಯ ಲಬ್ಧವನ್ನು ನಿರ್ಧರಿಸುವುದರಿಂದ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ವಿಕಾರಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆ.

ಅವಿಕಾರಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಒಂದು ಮುಖ್ಯ ಗುಣವನ್ನು ಈಗ ನಾವು ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಅದೇನೆಂದರೆ: **ಒಂದು ಅವಿಕಾರಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕವನ್ನು ಯೋಜಿಸಿದರೆ ಲಬ್ಧವೂ (ಅದೇ ಅವಧಿಯ) ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕವಾಗಿರುತ್ತದೆ**. ಏಕೆ ಹೀಗೆ? ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಯೋಜ್ಯದಲ್ಲಿ ಅದೇ ಬೆಲೆಗಳು ಮತ್ತೆ ಮತ್ತೆ ಬರುತ್ತಿರುತ್ತವೆ; ಜೊತೆಗೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅವಿಕಾರಿಯಾಗಿರುವುದರಿಂದ ಅದೇ ಬೆಲೆಗಳು ಯಾವಾಗ ಬಂದರೂ ಲಬ್ಧವು ಒಂದೇ ಆಗಿರಬೇಕು. ಇತಿ ಸಿದ್ಧಂ. ಗಣಿತದಲ್ಲಿ ಹೇಳುವುದಾದರೆ T ಅವಧಿಯ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಯೋಜ್ಯವೆಂದರೆ ಸ್ವಭಾವದಿಂದಲೇ $x(t_0 + T) = x(t_0)$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ. ಹೀಗಿರುವಾಗ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು $t = t_0$ ಆದಾಗ ಯಾವ ಲಬ್ಧ $y(t_0)$ ಅನ್ನು ಕೊಡುವುದೋ ಅದೇ ಲಬ್ಧವನ್ನು $t = t_0 + T$ ಆದಾಗಲೂ ಕೊಡಬೇಕು, ಅಂದರೆ $y(t+T) = y(t)$, ಅಂದರೆ ಲಬ್ಧ $y(t)$ ಕೂಡ T ಅವಧಿಯ ಒಂದು ಪ್ರತ್ಯಾವರ್ತೀ ಸೂಚಕವೇ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ.

೪.೩.೩ ರೇಖಾನುಗತತ್ವ

ಯಾವ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು **ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆ** ಯ ಗುಣವನ್ನು ಹೊಂದಿರುವುದೋ ಅದನ್ನು ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯೆನ್ನುತ್ತಾರೆ. ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯ ಗುಣದಿಂದ $x_1(t) \to y_1(t)$ ಮತ್ತು $x_2(t) \to y_2(t)$ ಆದರೆ ಆಯಾ ಯೋಜ್ಯಗಳನ್ನು ಸ್ಥಿರಾಂಕಗಳಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಕೂಡಿದರೆ ಲಬ್ಧವೂ ಹಾಗೆಯೇ ವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ:

$$ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t) \qquad (೭)$$

ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಈ ಕೆಳಗಿನ ಸತ್ಯಗಳನ್ನು ಒಳಗೊಂಡಿದೆ:

೧. ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಯೋಜಿಸಿದರೆ ಶೂನ್ಯವೇ ಲಭಿಸುತ್ತದೆ. ಅರ್ಥಾತ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಯೋಜ್ಯವನ್ನು ಒಂದು ಸ್ಥಿರಾಂಕದಿಂದ ಗುಣಿಸಿ ಅದನ್ನು ಲಬ್ಧವಾಗಿ ಹೊರಹಾಕುತ್ತದೆ. ಲಬ್ಧ, ಯೋಜ್ಯಗಳನ್ನು ಒಂದು ಪಟದಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಿದರೆ $(0, 0)$ ನ ಮೂಲಕ ಹಾದು ಹೋಗುವ ಒಂದು ಸರಳರೇಖೆ ಸಿಗುತ್ತದೆ

೨. ಯೋಜ್ಯವನ್ನು ದ್ವಿಗುಣಗೊಳಿಸಿದರೆ ಲಬ್ಧವೂ ದ್ವಿಗುಣವಾಗುತ್ತದೆ

೩. ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನವು ಕೇವಲ ಎರಡು ಯೋಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಮಾತ್ರ ಸೀಮಿತವಲ್ಲ. ಒಂದು ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆ $x[n] \to y[n]$ ನಲ್ಲಿ:

$$\sum_k a_k x_k[n] \to \sum_k a_k y_k[n] \qquad (೮)$$

ರೇಖಾನುಗತತ್ವವು ಸೂಚಕ ಪರಿಷ್ಕರಣದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಪ್ರಮುಖ ಸ್ಥಾನವನ್ನು ಪಡೆದಿದೆ ಎಂದರೆ ಅತಿಶಯೋಕ್ತಿಯಾಗಲಾರದು. ಆದರೂ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೆಲ್ಲ ರೇಖಾನುಗತವಾಗಿರುವುದಿಲ್ಲ (ಅವುಗಳು **ಅರೇಖಾನುಗತ** ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಾಗಿರುತ್ತವೆ).

ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಮತ್ತೆರಡು ಮುಖ್ಯ ಗುಣಗಳೆಂದರೆ:

೧. **ಒಂದು ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನಪೇಕ್ಷಕವಾಗಬೇಕಾದರೆ ಅದು ವಿರಾಮಾರಂಭಿಯಾಗಿರಬೇಕು (ಯೋಜ್ಯವನ್ನು ಅಳವಡಿಸುವ ಮುನ್ನ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಲಬ್ಧವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಬೇಕು)**. ಎಂದರೆ $t \le t_0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಯೋಜ್ಯ $x(t) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ಆ ಕಾಲಾವಧಿಯಲ್ಲಿ ಲಭ್ಯ $y(t) = 0$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಇದನ್ನು ತೋರಿಸುವುದು ಸುಲಭ: $t \le t_0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಯೋಜ್ಯವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿದ್ದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ರೇಖಾನುಗತವ ಹಾಗೂ ಅನಪೇಕ್ಷಕತ್ವದಿಂದ ಲಭ್ಯವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರಲೇಬೇಕು. ಇಲ್ಲದಿದ್ದರೆ $t \le t_0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ

ಲಭ್ಯವು $t > t_0$ ಆಗಿರುವಾಗಿನ ಯಾವುದೋ ಯೋಜ್ಯವನ್ನು ಅವಲಂಬಿಸಿರುವುದರಿಂದಲೇ ಅದು ಶೂನ್ಯವಲ್ಲ ಎಂದಾಗಿ ಇದರಿಂದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಅಪೇಕ್ಷಕತ್ವವು ಸಿದ್ಧವಾಗುತ್ತದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ರೇಖಾನುಗತವೂ ಅನಪೇಕ್ಷಕವೂ ಆಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಅದು ವಿರಾಮಾರಂಭಿಯಾಗಿರಬೇಕು.

೨. **ವಿರಾಮಾರಂಭಿಯಾದ ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೆಲ್ಲ ಅನಪೇಕ್ಷಕ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೇ.** ಏಕೆ? ಏಕೆಂದರೆ $t = t_{0+}$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $x(t) > 0$ ಎಂದಿಟ್ಟುಕೊಳ್ಳೋಣ. ಆಗ $y(t) = 0$ ಆಗಿದ್ದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು y ಅನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯಲು $t = t_{0+}$ ಆದಾಗಿನ ಯೋಜ್ಯವನ್ನು ಉಪಯೋಗಿಸುತ್ತಿಲ್ಲ ಎಂದರ್ಥ. ಅರ್ಥಾತ್ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಭವಿಷ್ಯದ ಯೋಜ್ಯಗಳನ್ನು ಪರಿಗಣಿಸದೆಯೇ ಈಗಿನ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಕೊಡುತ್ತಿದೆ. ಆದ್ದರಿಂದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನಪೇಕ್ಷಕ ಎಂದು ಸಿದ್ಧ.

೪.೪ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆ

ರೇಖಾನುಗತತ್ವ ಮತ್ತು ಅವಿಕಾರತ್ವ – ಇವೆರಡು ಗುಣಗಳಿಂದ ಕೂಡಿದ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು **ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆ** ಅಥವಾ **ರೇಖಾವಿಕಾರಿ ವ್ಯವಸ್ಥೆ** ಎಂದು ಕರೆಯುತ್ತಾರೆ. ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳನ್ನು ರಚಿಸುವುದು, ವಿಶ್ಲೇಷಿಸುವುದು ಸುಲಭ; ಜೊತೆಗೆ ಈ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಬಹಳ ಉಪಯುಕ್ತವೂ ಹೌದು. ಕೆಲವೆಡೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ರೇಖಾನುಗತವಾಗಿರದಿದ್ದರೂ (ಅರ್ಥಾತ್ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯನ್ನು ಪಾಲಿಸದಿದ್ದರೂ) ಅದರ ಆಧಾರ-ಸ್ಥಿತಿಯ ಸುತ್ತಮುತ್ತ ಲಘು-ಸೂಚಕ-ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗಾಗಿ ಅದನ್ನು ರೇಖಾನುಗತವೆಂದು ಭಾವಿಸಿ ನಡೆಯುವುದೂ ರೂಢಿಯಲ್ಲಿದೆ, ವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ವಿಶ್ಲೇಷಣೆಗೆ ಅತ್ಯಂತ ಉಪಯುಕ್ತ ಸಾಡಹನವೂ ಆಗಿದೆ.

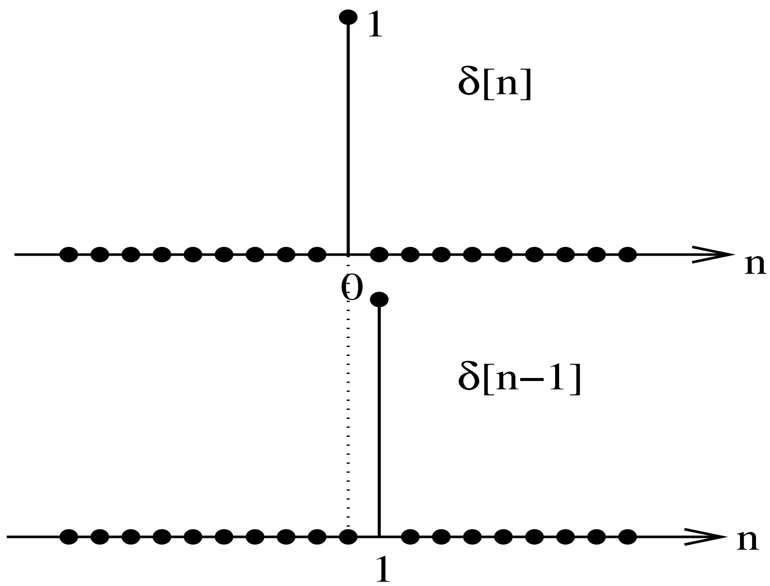
ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಒಳಗು-ಹೊರಗುಗಳನ್ನು ಸರಿಯಾಗಿ ಅರಿಯದೆ ಸೂಚಕ ಪರಿಷ್ಕರಣ ಶಾಸ್ತ್ರದಲ್ಲಿ ಹೆಚ್ಚು ದೂರ ಹೋಗಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. **ಈ ಲೇಖನದ ಶೇಷಭಾಗವನ್ನು ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಅಧ್ಯಯನಕ್ಕಾಗಿಯೇ ಮೀಸಲಿಡಲಾಗಿದೆ.**

೫ ಸಾಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಸಾಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಯೋಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ ತೋರುತ್ತವೆ, ಲಬ್ಧಗಳು ಹೇಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಹತ್ತಿರದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. *ಗತಿ*-ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ಮೊದಲು *ಕಾಲ*-ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೇ ಉಳಿದು ಕಲಿಯಬಹುದಾದ ಅನೇಕ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಾಶಿಸಲಾಗಿದೆ.

೫.೧ ಸಾಂತರ ಸೂಚಕವನ್ನು ಜರಗಿಸಿದ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ಕಾಣುವುದು

ಒಂದು *ಮೂಲಭೂತ* ಸಾಂತರ ಸೂಚಕಗಳ ಚೀಲ ನಮ್ಮ ಬಳಿಯಿದೆ ಎನ್ನೋಣ. “ಯೋಜ್ಯವು ಇದೆ” ಎನ್ನುವುದಕ್ಕೆ ಈ ಮೂಲಭೂತ ಸೂಚಕಗಳಿದಿದ್ದರೆ ಸಾಕು ಎನ್ನುವಷ್ಟು ಮೂಲಭೂತವದು ಎನ್ನೋಣ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಾಂತರ ಸೂಚಕ $x[n]$ ಅನ್ನು ಈ ಮೂಲಭೂತ $x_k[n]$ ಎಂಬ ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದರಲ್ಲಿ ನಾವು ಸಫಲವಾದರೆ ಆಗ ಯಾವುದೇ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಮೂಲಕ $x[n]$ ಅನ್ನು ಕಳಿಸಿದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಲಬ್ಧವನ್ನು ಕಂಡುಹಿಡಿಯುವುದು ಬಹಳ ಸುಲಭವಾದೀತು. ಹೇಗೆ? $x_k[n]$ ಗಳಿಗೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳನ್ನು ($y_k[n]$ ಗಳನ್ನು) ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಸಾಕು, ಅವುಗಳನ್ನು ಯೋಜ್ಯದಂತೆಯೇ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪಿಸಿದರೆ ಸಾಕು:



ಚಿತ್ರ ೮: ಮೇಲೆ: ಸಾಂತರ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ, ಕೆಳಗೆ: ಒಂದು ದಾಖಲೆ ಜರಗಿಸಿದ ಸಾಂತರ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \rightarrow y[n] = \sum_k a_k y_k[n] \tag{೯}$$

ಅಂತಹ *ಮೂಲಭೂತ* ಸೂಚಕವನ್ನು ಹೆಚ್ಚಾಗಿ ಹುಡುಕಬೇಕಾಗಿಲ್ಲ, ಅದೇ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ. ಇವುಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಬೇರೆ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಬಹುದಾದ್ದರಿಂದ ಇವುಗಳನ್ನು *ಏಕಮಾನ* ಎನ್ನಲಾಗಿದೆ. ಈ ಏಕಮಾನ ಸೂಚಕವೆಂದರೆ ಇನ್ನೇನಿಲ್ಲ, $n = 0$ ಆದಾಗ ಮಾತ್ರ ಏಕ-ಪರಿಮಾಣವನ್ನು ಹೊಂದಿದ್ದು n ನ ಬೇರೆಲ್ಲ ಬೆಲೆಗಳಿಗೆ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುವ ಸೂಚಕವೇ **ಏಕಮಾನ ಸೂಚಕ**. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರ ೮ ನಲ್ಲಿ ಚಿತ್ರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಏಕಮಾನ ಸೂಚಕವನ್ನು $\delta[n]$ ಎಂದು ಸಂಬೋಧಿಸುತ್ತೇವೆ. ಚಿತ್ರ ೮ ದಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಿರುವಂತೆ ಒಂದು ದಾಖಲೆ ಬಲಕ್ಕೆ ಜರಗಿಸಿದರೆ ದೊರಕುವುದೇ $\delta[n-1]$. ಹಾಗೆಯೇ k ದಾಖಲೆ ಬಲಕ್ಕೆ ಜರಗಿಸಿದರೆ ದೊರಕುವುದೇ $\delta_k[n] = \delta[n-k]$.

ಈಗ $x[n]$ ಅನ್ನು ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾನವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು ಸುಲಭ:

$$x[n] = \cdots + x[-2]\delta[n+2] + x[-1]\delta[n+1] + x[0]\delta[n] + x[1]\delta[n-1] + x[2]\delta[n-2] + \cdots \tag{೧೦}$$

ಇದನ್ನು ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ ಕೆಳಗಿನ ಸಂಕಲನವಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \tag{೧೧}$$

ಇಲ್ಲಿ ಸಮೀಕರಣ ೯ ನಲ್ಲಿರುವ a_k ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು $x[k]$ ಪಡೆದಿರುತ್ತದೆ ಹಾಗೂ $x_k[n]$ ನ ಸ್ಥಾನವನ್ನು $\delta[n-k]$ ಪಡೆದಿರುತ್ತದೆ.

ಹೀಗೆ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ $x[n]$ ಅನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದನ್ನು ಚಿತ್ರ ೯ ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಚಿತ್ರ ೯ ನಿಂದ ಮತ್ತು ಸಮೀಕರಣ ೧೧ ರಿಂದ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕದ "ಸೋಸುವ" ಗುಣ ತಿಳಿದುಬರುತ್ತದೆ, ಅರ್ಥಾತ್ – ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ $\delta[n-k]$ ನಿಂದ ಯಾವುದೇ ಸೂಚಕ $x[n]$ ಅನ್ನು ಗುಣಿಸಿದರೆ ಗುಣಲಬ್ಧವಾಗಿ ದೊರಕುವ ಸೂಚಕವು $n=k$ ಆಗಿದ್ದಾಗ ಮಾತ್ರ ಶೂನ್ಯವಾಗಿರದೆ $x[k]$ ಆಗಿರುತ್ತದೆ; $n \neq k$ ಎನ್ನುವಾಗ ಗುಣಲಬ್ಧವು ಶೂನ್ಯವಾಗಿರುತ್ತದೆ. ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕವು ಹೀಗೆ ಒಂದೇ ಒಂದು ಬೆಲೆಯನ್ನು ಮಾತ್ರ "ಸೋಸುವ" ಗುಣವನ್ನು ಓದುಗರು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಬೇಕು.

೫.೨ ಸಂಗಮ

ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಾವು ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದನ್ನು ಕಂಡೆವು. ಈಗ ಜರಗಿಸಿದ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ $\delta[n-k]$ ಅನ್ನು ಒಂದು ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಯೋಜ್ಯವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಲಭಿಸುವುದನ್ನು $h_k[n]$ ಎನ್ನೋಣ. ಯಾವುದೇ ಒಂದು ಸಾಂತರ ಸೂಚಕ $x[n]$ ಅನ್ನು ಜರಗಿಸಿದ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ಬರೆಯಬಹುದಾದರಿಂದ:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h_k[n] \qquad (೧೨)$$

ಮೇಲಿನ ಸೂತ್ರವು ನಿಲ್ಲುವುದಕ್ಕೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆ ಅವಿಕಾರಿಯಾಗಿರಬೇಕಿಲ್ಲ ಎಂದು ನೆನಪಿನಲ್ಲಿಡಿ. ಆದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅವಿಕಾರಿಯೂ ಆಗಿದ್ದರೆ (ಅದು ಸರಳವೆನಿಸಿ) ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕವನ್ನು ಜರಗಿಸಿದರೆ ವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಲಬ್ಧವೂ ಅಷ್ಟೇ ಜರಗುತ್ತದೆಯಷ್ಟೆ. ಅರ್ಥಾತ್ ಅವಿಕಾರತ್ವದಿಂದ

$$\delta[n] \rightarrow h[n] \qquad (೧೩)$$

ಆಗಿದ್ದರೆ

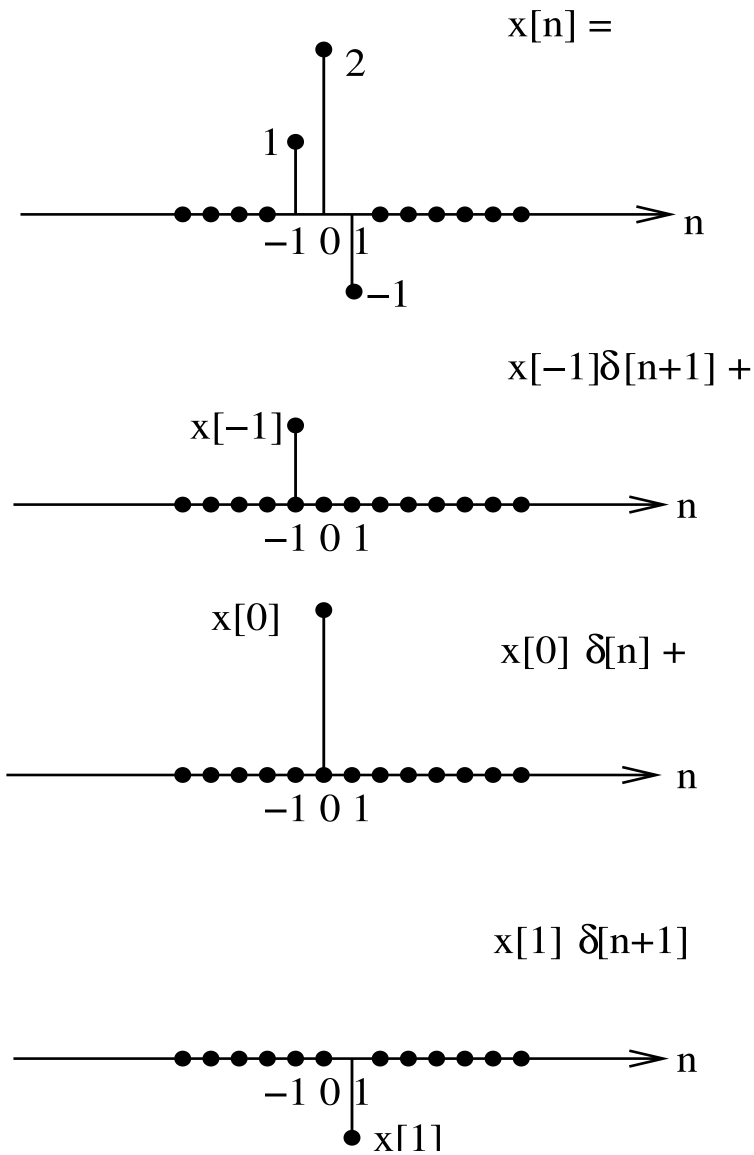
$$\delta[n-k] \rightarrow h[n-k]. \qquad (೧೪)$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣಗಳಲ್ಲಿ $h[n]$ ಎನ್ನುವುದು ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯ **ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ** ಎನಿಸಿಕೊಳ್ಳುತ್ತದೆ. ಈ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ತಿಳಿದಿದ್ದರೆ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಯಾವುದೇ ಯೋಜ್ಯಕ್ಕೆ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯಿಸುತ್ತದೆ ಎಂದು ಕೂಡಲೆ ತಿಳಿಯಬಹುದು. ಸಮೀಕರಣ ೧೨ ರಿಂದ:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k] \rightarrow y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad (೧೫)$$

ಇಲ್ಲಿ ಯೋಜ್ಯ $x[n]$ ಮತ್ತು ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ $h[n]$ ಗಳು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಈ ಸಂಕಲನಕ್ಕೆ **ಸಂಗಮ** ಎಂದು ಹೆಸರು. ಸಂಗಮದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವು ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ:

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \qquad (೧೬)$$



ಚಿತ್ರ ೯: ಏಕಮಾನ ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆ

ಸಂಗಮವು ಸೂಚಕ ಪರಿಷ್ಕರಣದಲ್ಲಿ ಅತ್ಯಂತ ಮುಖ್ಯವಾದ ಕ್ರಿಯೆ ಎಂದು ಇಲ್ಲಿ ಹೇಳಲಿಚ್ಛಿಸುತ್ತೇನೆ. ಇದನ್ನು ಚಿತ್ರೀಕರಿಸಿ ವಿವರಿಸಿದರೆ ಇನ್ನೂ ಸುಲಭ್ವಾಗಿ ಅರ್ಥವಾಗುತ್ತದೆ, ಆದರೆ ಕಲಾವಕಾಶವಿಲ್ಲದ ಕಾರಣ ಚಿತ್ರೀಕರಣಕ್ಕೆ ಕೈ ಹಾಕಲಾರೆ. ಇಲ್ಲಿ ನೆನಪಿಡಬೇಕಾದ, ಎಂದೂ ಮರೆಯಬಾರದ ಸತ್ಯವೇನೆಂದರೆ: **ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳಲ್ಲಿ ಯೋಜ್ಯ ಮತ್ತು ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಗಳ ಸಂಗಮದಿಂದ ಲಬ್ಧವು ಹುಟ್ಟುತ್ತದೆ.**

೫.೩ ಸಂಗಮ ಮತ್ತು ಸಾಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಗುಣಗಳು

- **ಒಂದು ಸಾಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಅದರ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.** ಅರ್ಥಾತ್ ಒಂದು ಸಾಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅರಿತರೆ ಅದನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅರಿತಂತೆ.

- **ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ:**

  $x[n] * y[n] = y[n] * x[n]$

  ಅಥವಾ –

  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} y[k]x[n-k]$

- **ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ:**

  $x[n] * (h_1[n] + h_2[n]) = x[n] * h_1[n] + x[n] * h_2[n]$

- **ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ:**

  $x[n] * (h_1[n] * h_2[n]) = (x[n] * h_1[n]) * h_2[n]$

- **ಒಂದು ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನಪೇಕ್ಷಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ $h[n]$ ಬಲಗೈ ಸರಣಿಯಾಗಿರಬೇಕು.** ಅರ್ಥಾತ್ –

  $n < 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $h[n] = 0$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅಲ್ಲದೆ, **ಬಲಗೈ ಸರಣಿಯನ್ನು ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೆಲ್ಲ ಅನಪೇಕ್ಷಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.**

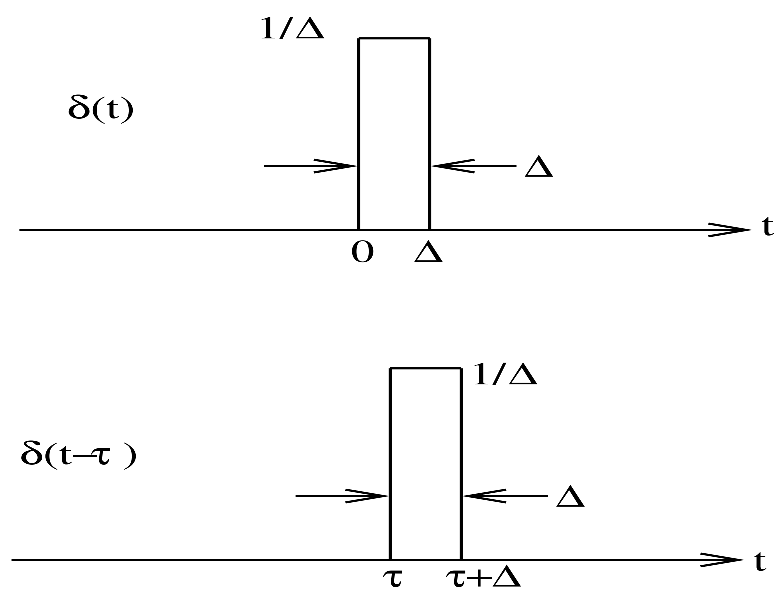
- **ಒಂದು ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯ ಶುದ್ಧ-ಸಂಕಲನವು ಒಂದು ಸೀಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು.** ಅರ್ಥಾತ್ –

  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| < \infty$

  ಅಲ್ಲದೆ, **ಮೇಲಿನ ಷರತ್ತು ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ ಆ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆ ಸ್ಥಿರವೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.**

೬ ನಿರಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಕಾರ್ಯವಿಧಾನ

ಈ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ನಿರಾಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳು ಯೋಜ್ಯಗಳಿಗೆ ಹೇಗೆ ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ ತೋರುತ್ತವೆ, ಲಬ್ಧಗಳು ಹೇಗೆ ಉತ್ಪನ್ನವಾಗುತ್ತವೆ ಎನ್ನುವುದನ್ನು ಹತ್ತಿರದಿಂದ ಪರಿಶೀಲಿಸೋಣ. *ಗತಿ-ಪ್ರಪಂಚಕ್ಕೆ* ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಪರಿವರ್ತಿಸುವ ಮೊದಲು *ಕಾಲ-ಪ್ರಪಂಚದಲ್ಲೇ* ಉಳಿದು ಕಲಿಯಬಹುದಾದ ಅನೇಕ ತತ್ವಗಳನ್ನು ಇಲ್ಲಿ ಪ್ರಕಾಶಿಸಲಾಗಿದೆ.



ಚಿತ್ರ ೧೦: ನಿರಂತರ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ

೬.೧ ನಿರಂತರ ಸೂಚಕವನ್ನು ಜರಗಿಸಿದ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ಕಾಣುವುದು

ಹಿಂದಿನ ಅಧ್ಯಾಯದಲ್ಲಿ ಸಾಂತರ ಸೂಚಕಗಳನ್ನು ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ಕಂಡೆವು, ಈಗ ನಿರಂತರ ಸೂಚಕಗಳನ್ನೂ ಹಾಗೆ ಕಾಣೋಣ. ಇಲ್ಲಿ ವ್ಯತ್ಯಾಸವೇನೆಂದರೆ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕವು ಅಲ್ಲಿಯಂತೆ ಸಾಂತರವಾಗಿರಲು ಸಾಧ್ಯವಿಲ್ಲ, ನಿರಂತರವೇ ಆಗಬೇಕು. ನಿರಂತರ ಏಕಮಾನ ಸೂಚಕವನ್ನು ಚಿತ್ರ ೧೦ ನಲ್ಲಿ ತೋರಿಸಲಾಗಿದೆ. ಈ ಸೂಚಕ $\delta_\Delta(t)$ ನ ಅಗಲ Δ ಆಗಿದ್ದು ಎತ್ತರ $\frac{1}{\Delta}$ ಆಗಿರುವುದರಿಂದ ಇದರ ವಿಸ್ತೀರ್ಣ 1 ಆಗಿರುತ್ತದೆ. **ನಿರಂತರ ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕವೆಂದರೆ ಏಕ-ವಿಸ್ತೀರ್ಣವಿರುವ ಸೂಚಕ.**

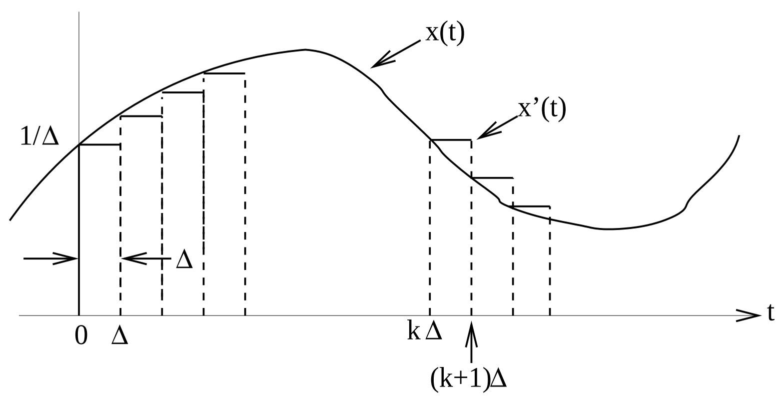
ಈ ಏಕಮಾನ ಸೂಚಕಗಳನ್ನುಪಯೋಗಿಸಿ ಯಾವುದೇ ನಿರಂತರ ಸೂಚಕ $x(t)$ ಅನ್ನು ಅಂದಾಜಿಸಬಹುದೇ ಹೊ-ರತು ದೋಷರಹಿತವಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಲಾಗುವುದಿಲ್ಲ. ಚಿತ್ರ ೧೧ ನಲ್ಲಿ $x(t)$ ಎನ್ನುವ ನಿರಂತರ ಸೂಚಕವನ್ನು $x'(t)$ ನ ಮೂಲಕ ಅಂದಾಜಿಸಲಾಗಿದೆ.

ಹೀಗೆ ಅಂದಾಜಿಸುವುದರಿಂದ ದೊರಕಿದ $x'(t)$ ಯು ಕ್ಷಣ $t = k\Delta$ ನಲ್ಲಿ ಪಡೆಯುವ ಬೆಲೆ $x(k\Delta)$ ಆಗಿದ್ದು ಅದೇ ಬೆಲೆಯು $t = (k+1)\Delta$ ವರೆಗೂ ಉಳಿದಿರುವುದನು ಗಮನಿಸಿ. ಆದ್ದರಿಂದ

$$x'(t) = x(k\Delta), k\Delta < t < (k+1)\Delta \qquad (೧೭)$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವನ್ನು ಹೀಗೂ ಬರೆಯಬಹುದು:

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t - k\Delta)\Delta \qquad (೧೮)$$



ಚಿತ್ರ ೧೧: ನಿರಂತರ ಸೂಚಕವನ್ನು ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕಗಳ ಮೂಲಕ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುವುದು

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ Δ ವು ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ $x'(t)$ ಮತ್ತು $x(t)$ ಗಳ ಮಧ್ಯೆಯ ವ್ಯತ್ಯಾಸವು ಕ್ಷೀಣಿಸಿ ಸಂಕಲನವು ಕೆಳಗಿನ ಅನುಕಲನವಾಗಿ ಪರಿವರ್ತಿಸುತ್ತದೆ:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \qquad (೧೯)$$

ಈ ಸಮೀಕರಣವು ನಿರಂತರ ಸೂಚಕಗಳಾದ $x(t)$ ಮತ್ತು $\delta(t)$ ಗಳ ಸಂಗಮವನ್ನು ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸುತ್ತದೆ. ಅಲ್ಲದೆ, ಇಸಾಂತರ ಸೂಚಕಗಳಂತೆಯೇ ಇಲ್ಲೂ ನಾವು $x(t)$ ಅನ್ನು *ಮೂಲಭೂತ* ಸೂಚಕಗಳಾದ $\delta(t-\tau)$ ಗಳ ಉಪರಿಸ್ಥಾಪನೆಯಾಗಿ ವ್ಯಕ್ತಪಡಿಸಿದ್ದೇವೆ.

೬.೨ ಸಂಗಮ

ಜರಗಿಸಿದ (ನಿರಂತರ) ಏಕಮಾನ-ಸೂಚಕ $\delta_\Delta(t)$ ಅನ್ನು ಒಂದು ನಿರಂತರ ರೇಖಾನುಗತ ವ್ಯವಸ್ಥೆಗೆ ಯೋಜ್ಯವಾಗಿ ಕೊಟ್ಟರೆ ಲಭಿಸುವುದನ್ನು $h_\Delta(t)$ ಎನ್ನೋಣ. ಆಗ ಹಿಂದಿನ ಭಾಗದಲ್ಲಿ ಅಂದಾಜಿನಿಂದ ಬಂದ ಸೂಚಕ

$$x'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)\delta_\Delta(t-k\Delta)\Delta \rightarrow y'(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k\Delta)h_\Delta(t-k\Delta)\Delta \qquad (೨೦)$$

ಹಿಂದಿನಂತೆ Δ ವು ಶೂನ್ಯವನ್ನು ಸಮೀಪಿಸಿದಾಗ ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣವು ಹೀಗೆ ಬದಲಾಗುತ್ತದೆ:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)\delta(t-\tau)d\tau \rightarrow y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (೨೧)$$

ಮೇಲಿನ ಸಮೀಕರಣದಲ್ಲಿ ಯೋಜ್ಯ $x(t)$ ಮತ್ತು **ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ** $h(t)$ ಗಳು ಒಂದು ವಿಶೇಷ ರೀತಿಯಲ್ಲಿ ಸೇರಿರುವುದನ್ನು ಗಮನಿಸಿ. ಇದನ್ನೇ (ನಿರಂತರ) **ಸಂಗಮ** ಎನ್ನುವುದು. ಸಂಗಮದ ಅರ್ಥವನ್ನು ಕೆಳಗಿನ ಸಮೀಕರಣವು ತಿಳಿಸಿಕೊಡುತ್ತದೆ:

$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \qquad (೨೨)$$

ನಿರಂತರ ಸಂಗಮವನ್ನೂ ಸಾಂತರ ಸಂಗಮದಂತೆಯೇ ಚಿತ್ರೀಕರಿಸಿ ಅದರ ಅರ್ಥವನ್ನು ಮತ್ತಷ್ಟು ಚೆನ್ನಾಗಿ ತಿಳಿದುಕೊಳ್ಳಬಹುದು. ಸಂಕ್ಷಿಪ್ತವಾಗಿ $x(t)$ ಮತ್ತು $h(t)$ ಗಳ ನಿರಂತರ ಸಂಗಮಕ್ರಿಯೆಯಲ್ಲಿ ಹಂತಗಳು:

೧. **ಪ್ರತಿಬಿಂಬಿಸು:** $h(\tau) \rightarrow h(-\tau)$

೨. **ಜರಗಿಸು:** $h(-\tau) \rightarrow h(t-\tau)$

೩. **ಗುಣಿಸು:** $h(t-\tau) \rightarrow x(\tau)h(t-\tau)$

೪. **ಅನುಕಲಿಸು:** $x(\tau)h(t-\tau) \rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau$

೬.೩ ಸಂಗಮ ಮತ್ತು ನಿರಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳ ಗುಣಗಳು

- **ಒಂದು ನಿರಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯನ್ನು ಅದರ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ವಿವರಿಸುತ್ತದೆ.** ಅರ್ಥಾತ್ ಒಂದು ಸಾಂತರ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯನ್ನು ಅರಿತರೆ ಅದನ್ನು ಸಂಪೂರ್ಣವಾಗಿ ಅರಿತಂತೆ.

- **ಪರಿವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ:**

  $x(t) * y(t) = y(t) * x(t)$

  ಅಥವಾ –

  $\int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} y(\tau)x(t-\tau)d\tau$

- **ವಿಭಾಜಕ ನಿಯಮ:**

  $x(t) * (h_1(t) + h_2(t)) = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$

- **ಸಹವರ್ತನೀಯ ನಿಯಮ:**

  $x(t) * (h_1(t) * h_2(t)) = (x(t) * h_1(t)) * h_2(t)$

- **ಒಂದು ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಅನಪೇಕ್ಷಕವಾಗಿದ್ದರೆ ಅದರ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆ $h(t)$ ಬಲಗೈ ಸೂಚಕವಾಗಿರಬೇಕು.** ಅರ್ಥಾತ್ –

  $t < 0$ ಆಗಿದ್ದಾಗ $h(t) = 0$ ಆಗಿರಲೇಬೇಕು. ಅಲ್ಲದೆ, **ಬಲಗೈ ಸೂಚಕವನ್ನು ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯಾಗಿ ಹೊಂದಿರುವ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಗಳೆಲ್ಲ ಅನಪೇಕ್ಷಕವಾಗಿರುತ್ತವೆ.**

- **ಒಂದು ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆಯು ಸ್ಥಿರವಾಗಿರಬೇಕಾದರೆ ಏಕಮಾನ-ಪ್ರತಿಕ್ರಿಯೆಯ ಶುದ್ಧ-ಅನುಕಲನವು ಒಂದು ಸೀಮಿತ ಸಂಖ್ಯೆಯಾಗಿರಬೇಕು.** ಅರ್ಥಾತ್ –

  $\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|dt < \infty$

  ಅಲ್ಲದೆ, ಮೇಲಿನ ಷರತ್ತು ಅನ್ವಯಿಸಿದರೆ ಆ ಸರಳವ್ಯವಸ್ಥೆ ಸ್ಥಿರವೆಂದು ನಿರ್ಧರಿಸಬಹುದು.